Taubesノルムの使い方

§1. まとめ

① 基本のTaubesノルム

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ (X,g) \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

$$\|s\|_T := \sup_{x\in X}\int_X g(x,y)\,|s(y)|\,dy$$

where $g(x,y)$ = Green核

② 使うべきとき

$\Rightarrow$ ASD方程式などの "small solutions" を作るとき.

$\Updownarrow$ def

自明な解の近くの解

本質的に摂動論的。

つまり、陰関数定理 ($\fallingdotseq$ 不動点定理) 的。

$$\Delta u + u + q(x,u,\nabla u) = \phi$$

$$\Leftrightarrow\ (\Delta+1)u = \phi - q(x,u,\nabla u)$$

$$\Leftrightarrow\ u = (\Delta+1)^{-1}\left[\phi - q(x,u,\nabla u)\right]$$

③ 利点

i) アプリオリ評価がほぼ自明に出る.

ii) 接続が入っても平行した議論が通る。

(cf. Kato's ineq (≒ diamagnetic ineq))

iii) Taubes トリックそのものが観察しやすい.

① $\int g(x,y)|s(y)|dy \le \|s\|_\infty \cdot \underbrace{\int g(x,y)\,dy}_{<\infty}$

$g(x,y) \sim \dfrac{1}{d(x,y)^2}$

② Suppose $|\mathrm{supp}(s)| = v$.

$$\int_X g(x,y)|s(y)|dy$$

$$= \underbrace{\int_{d(x,y)\le r}}_{①} + \underbrace{\int_{d(x,y)\ge r}}_{②}$$

$$\begin{cases} ① \leq \|s\|_\infty C(g) \displaystyle\int_0^r \frac{r^3}{r^2}\,dr = \frac{C_1(g)}{2}\|s\|_\infty r^2 \\[2ex] ② \leq \dfrac{C_2(g)}{r^2} \displaystyle\int_X |s(y)|\,dy \leq \frac{C_2(g)}{r^2}\|s\|_\infty v \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $r = v^{\frac{1}{4}}$ と取れば,

$$① + ② \leq C(g)\|s\|_\infty \sqrt{v}$$

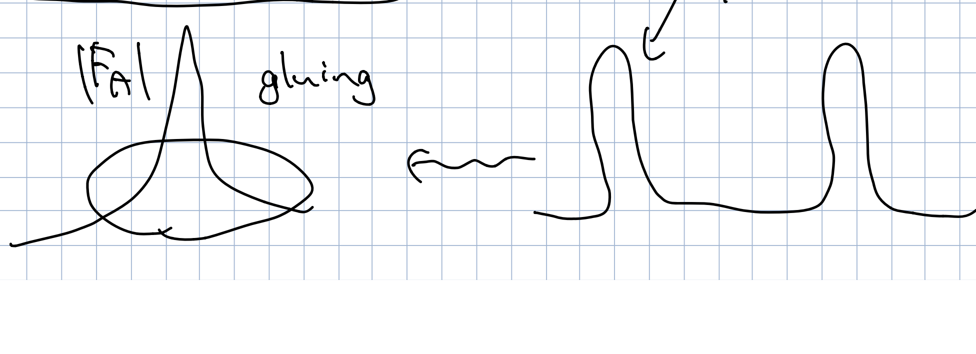
よって, イ と ロ を合わせて,

$$s = s_1 + s_2$$

$$\begin{cases} s_1 : \text{small } L^\infty \text{ norm} \\ s_2 : \text{small support} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|s\|_T \leq C\|s_1\|_\infty + C\|s_2\|_\infty \sqrt{|\mathrm{supp}(s_2)|}$$

ASD方程式のとき



§2. 設定

- (X, g) : 4次元有向閉Riemann多様体
- $$\begin{array}{c} P \\ \big\downarrow SO(2) \\ X \end{array}$$

解きたい式

Given A : conn on P,

find $a \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ s.t.

$$F^+(A+a) = 0$$

$$F^+(A+a) = F_A^+ + d_A^+ a + (a \wedge a)^+$$

$\uparrow$ not elliptic

Ansatz (ゲージ固定)

$$a = d^* u \quad \text{for} \quad u \in \Omega^+(\mathfrak{g}_P)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{d_A^+ d_A^* u + (d_A^* u \wedge d_A^* u)^+ + F_A^+ = 0}$$

Weitzenböck公式

$$d_A^+ d_A^* u = \frac{1}{2}\nabla_A^*\nabla_A u + \left(\frac{\mathrm{Scal}}{6} - W^+\right)u + F_A^+ \cdot u$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{1}{2}\nabla_A^*\nabla_A u + \left(\frac{S}{6} - W^+\right)u + (d_A^* u \wedge d_A^* u)^+ + F_A^+\cdot u + F_A^+ = 0}$$

◎ 今日の仮定 $(\Rightarrow (H^2 = 0))$

$(X, g) = (S^4, g)$ s.t. $\mathrm{Scal} = 3$ & $W^+ = 0$

$$\rightsquigarrow \boxed{\Delta_A u + u + (d_A^* u \wedge d_A^* u)^+ + F_A^+ \cdot u + F_A^+ = 0}$$

可逆

観察

$\mathfrak{su}(2)$ の norm $-\mathrm{tr}(AB)$

- $|(d_A^* u \wedge d_A^* u)^+| \leq 8\sqrt{2}\,|\nabla_A u|^2$
- "$|F_A^+| \ll 1$"

従って, 以上を整理して, 今日の設定は次である。

設定

- (X, g) ; m次元閉 Riemann 多様体 $(m \geq 3)$
- $\begin{array}{c}(E, (\cdot,\cdot)) \\ \downarrow \\ X\end{array}$ a vector bdl with metric

- $H : (E \otimes T^*X) \times (E \otimes T^*X) \to E$
  - symmetric, bilinear
  - $\exists C > 0, \forall \xi, \eta \quad |H(\xi, \eta)| \leq C|\xi| \cdot |\eta|$

- $f \in \Gamma(\mathrm{End}\, E)$ s.t. $|f|$ は"小さい"

このとき，次の方程式を解きたい：

Fix a metric conn A on E.
Given $\phi \in \Gamma(E)$ with "$|\phi| << 1$",
find $u \in \Gamma(E)$ s.t.

$$\Delta_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \phi.$$

§3. ASD方程式の特徴

$$\Delta_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \Phi.$$

① $\Delta_A u + u$ ：可逆

② $\Delta_A u + H(\nabla_A u, \nabla_A u)$ ：スケール不変

($\to$ regularity の議論)

③ $\|f\| \ll 1$ $\left(\sim |F_A^+| \ll 1 \right)$

④ $|\Phi| \ll 1$ $\left(\sim |F_A^+| \ll 1 \right)$

従って、$|u| \ll 1$ となる解の存在が期待される。

§4. Taubes 1lく4の作り方

I. $(E, \langle\ ,\ \rangle) = X \times \mathbb{R}$ かつ $A =$ 自明 のとき

$$(\Delta + 1)u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi.$$

I.i) $(\Delta + 1)u = \phi$

Prop

$$\Delta + 1 : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$$

は単射かつ全射となる。

つまり, $\forall \phi \in C^\infty(X)\ \exists!\, u \in C^\infty(X)\ [\Delta u + u = \phi]$

∵ 単射

$$0 = \int_X ((\Delta + 1)u, u) = \int |\nabla u|^2 + |u|^2$$

$$\Rightarrow u \equiv 0.$$

全射 (index = 0 & 単射)

Green 核 $g(x,y)$

$$\Delta u + u = \phi \Rightarrow u(x) = \int_X g(x,y)\,\phi(y)\,dy.$$

例 $B \subset \mathbb{R}^4$ 半径1の球, Dirichlet条件

$$\Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{|y|^2|x-y^*|^2}\right)$$

$$\left(y^* = \frac{y}{|y|^2} \right)$$

$$|g(x,y)| \sim \frac{1}{|x-y|^2} \quad \& \quad g(x,y) > 0$$

○ 一般の場合の Green 核の構成は、

摂動論でやる。

近似解 $\dfrac{(\text{cut off fct})}{d(x,y)^{m-2}}$ から部分積分により

Neumann 級数を作る。(Levi の方法)

すると、構成より $g(x,y) \sim \dfrac{1}{d(x,y)^{m-2}}$ から

最大値原理より $g(x,y) > 0$ となる。

つまり，線型作用素

$$G : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$$

が存在して，

$$(\Delta+1)\circ G = G\circ(\Delta+1) = \mathrm{id}$$

となる。（有界とかそういうことは何も言ってない。）

注　G が Green核で表現できることは，
Schwarz の Kernel thm から出るが，
$g(x,y) \sim \dfrac{1}{d(x,y)^{m-2}}$ は具体的な構成から分かる。

$g(x,y) > 0$ は方程式をみたすことからわかる。
前の構成ではこれらの性質を使う。

定義

$$\|u\|_0 := \sup_{x \in X} \int g(x,y)\,|u(y)|\,dy$$

$$\mathcal{C}_0 := \overline{C^\infty(X)}^{\|\cdot\|_0}$$

Prop

$G : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ は、$\mathcal{C}_0$ から L^∞ への有界線型写像に拡張する。

∵ $\Delta u + u = \phi$ とする。

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int g(x,y)\,(\Delta u + u)\,dy \right| \\ &= \left| \int g(x,y)\,\phi(y)\,dy \right| \\ &\le \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy \le \|\phi\|_0 \end{aligned}$$

//

I. ii) $(\Delta+1)u + H(\nabla u, \nabla u) = \phi$

まずは今解きたい式

$$\Delta u + u + H(\nabla u, \nabla u) = \phi$$

を不動点を求める式に書き換える。

$$\Delta u + u + H(\nabla u, \nabla u) = \phi$$

$$\Delta u + u = -H(\nabla u, \nabla u) + \phi$$

$$u = G\left(-H(\nabla u, \nabla u) + \phi\right)$$

従って、

$$\mathcal{F}_\phi : C^\infty(X) \to C^\infty(X),$$
$$u \mapsto G(-H(\nabla u, \nabla u) + \phi)$$

とおくとき、$u = \mathcal{F}_\phi(u)$ を解きたい。

そのための IIL 4 を use る。

ここが最もマジカルなところだが、
その議論は自明である。

当たり前の式 $\left(\Delta = -\sum \partial_i^2 \right)$

$$\boxed{\Delta |u|^2 = 2u\Delta u - 2|\nabla u|^2}$$

$$\rightsquigarrow \Delta|u|^2 + |u|^2 = 2u\Delta u + |u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

$$= 2\left(u\Delta u + |u|^2\right) - |u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

$$\therefore\ |\nabla u|^2 = -\frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2 + |u|^2\right) - \frac{1}{2}|u|^2$$

$$+ (u, \Delta u + u)$$

$$\therefore\ \int_X g(x,y)|\nabla u|^2 dy$$

$-|u|^2 \leq 0$ 0

$\vee \Leftarrow g(x,y) > 0$

$$= -\frac{1}{2}\int g(x,y)\left(\Delta|u|^2 + |u|^2\right)dy - \frac{1}{2}\int g(x,y)|u|^2 dy$$

$$+ \int g(x,y)(u, \Delta u + u)\,dy$$

$$\leq \int g(x,y)(u, \Delta u + u)\,dy \leq \|u\|_\infty \int g(x,y)(\Delta u + u)\,dy$$

つまり，$\forall u \in C^\infty(X)$ に対して，

$$(☆) \quad \int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy \leq \|u\|_\infty \int g(x,y)\,(\Delta u + u)\,dy$$

が成り立つ。これをノルムの言葉で言い換える。

定義2

$$\begin{cases} \|u\|_0 := \sup\limits_{x \in X} \displaystyle\int g(x,y)\,|u(y)|\,dy \\ \|u\|_{00} := \sup |u(x)| + \sqrt{\sup\limits_{x \in X} \displaystyle\int g(x,y)\,|\nabla u(y)|^2\,dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_0 := \overline{C^\infty(X)}^{\|\cdot\|_0} \\ C_{00} := \overline{C^\infty(X)}^{\|\cdot\|} \end{cases}$$

Prop3

$G : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ は，C_0 から C_{00} への有界線型写像に拡張する。

(ii) $\Delta u + u = \phi$ とする。従って、

$$u(x) = \int g(x,y)\phi(y)\,dy$$

である。このとき、示したいのは、

$$\|u\|_\infty \leq C\|\phi\|_0$$

である。

まず、定義より、

$$|u(x)| = \left|\int g(x,y)\phi(y)\,dy\right|$$

$g(x,y)>0$
$$\leq \int g(x,y)|\phi(y)|\,dy$$

$$\leq \|\phi\|_0$$

次に、当たり前の不等式(*)より

$$\int g(x,y)|\nabla u|^2 \leq \|u\|_\infty \cdot \int g(x,y)\phi(y)\,dy$$

$$\leq \|u\|_\infty \int g(x,y)|\phi(y)|\,dy$$

$$\leq \|u\|_\infty \cdot \|\phi\|_0 \quad \leq \|\phi\|_0 \cdot \|\phi\|_0$$

よって、

$$\|u\|_{00} \leq \|\phi\|_0 + \sqrt{\|\phi\|_0^2} = 2\|\phi\|_0$$

を得る。 //

次に、$\phi \in \mathcal{C}_0$のとき、$\mathcal{F}_\phi : \mathcal{C}_{00}$ ⟲ となることを示す。

$$\mathcal{F}_\phi(u) = G\left(-H(\nabla u, \nabla u) + \phi\right)$$

まず Prop 2 より

$$\|\mathcal{F}_\phi(u)\|_{00} = \|G(-)\|_{00}$$

$$\leq 2\|-H(\nabla u, \nabla u) + \phi\|_0$$

$$\leq 2\|H(\nabla u, \nabla u)\|_0 + 2\|\phi\|_0$$

を得る。ところが、

$$\|H(\nabla u, \nabla u)\|_0 = \sup \int g(x,y)\,|H(\nabla u, \nabla u)|\,dy$$

$$\leq \|H\|_\infty \sup \int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy$$

← $\mathcal{C}_{00}$ ノルムの一部

より，

$$\|\mathcal{F}_\phi(u)\|_{00} \leq 2\|H\|_\infty \cdot \|u\|_{00}^2 + 2\|\phi\|_0$$

となる。

同様にして，

$$\|\mathcal{F}_\phi(u) - \mathcal{F}_\phi(v)\|_{00} \leq 4\|H\|_\infty \|u-v\|_0 \|u+v\|_0$$

を得る。

よって，

$$\underline{\mathcal{C}_{00}} := \left\{ u \in \mathcal{C}_{00} \;\middle|\; \|u\|_{00} < \frac{1}{2}\frac{1}{4\|H\|_\infty} \right\}$$

とおくとき：

<u>Prop 4</u>

$\|\phi\|_0 < \frac{1}{4}\frac{1}{4\|H\|_\infty}$ とする。

このとき，$\mathcal{F}_\phi(\underline{\mathcal{C}_{00}}) \subset \underline{\mathcal{C}_{00}}$ かつ $\mathcal{F}_\phi : \underline{\mathcal{C}_{00}} \circlearrowleft$ は縮小写像である。

よって，$\Delta u + u + H(Du, Du) = \phi$ が解けた！

注 regularity

$$\|u\|_{0,1} := \|u\|_{0} + \|\nabla u\|_{0}$$

を導入する。 $\nabla g(x,y)$ の評価と上の Prop より、
$\mathcal{F}_\phi$ は $C^{0,1}$ でも contraction になる。小さい
不動点は唯一つなので、上で得た解と一致する。

I. iii) $\Delta u + u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$

再び不動点方程式に書き換える：

$$u = G\left(-H(\nabla u, \nabla u) - f(u) - \phi\right)$$

このとき、

$$\| G(f(u)) \|_{\infty} \leq 2 \| f(u) \|_0$$

だが、

$$\| f(u) \|_0 = \sup \int g(x,y) \, | f(u) | \, dy$$

$$\leq \sup \int g(x,y) \, |f| \, |u| \, dy$$

$$\leq \| u \|_{\infty} \cdot \sup \int g(x,y) \, |f| \, dy$$

$$= \| u \|_{\infty} \cdot \| f \|_0$$

$$\leq \| u \|_{\infty} \cdot \| f \|_0$$

よって、

$$\|G(-H(\nabla u,\nabla u)-f(u)+\phi)\|_\infty$$

$$\le 2\left[\|H(\nabla u,\nabla u)\|_0+\|f(u)\|_0+\|\phi\|_0\right]$$

$$\le 2\left[\|H\|_\infty\|u\|_\infty^2+\|f\|_0\cdot\|u\|_\infty+\|\phi\|_0\right]$$

と得る。

従って、$\|f\|_0 \ll 1$ のとき、前と同様の不動点の議論が走る。

注 ASD方程式のとき

$$\phi = F_A^+$$

$$f(u) = F_A^+ \cdot u$$

なので、$\|\phi\|_0 \ll 1$ と $\|f\|_0 \ll 1$ は同じこと。

II. 一般の $(E, (,))$ と A のとき

Kato's ineq

A : metric conn.

$\Longrightarrow \forall u \in \Gamma(E) \quad |\nabla |u|| \leq |\nabla_A u|$

∵

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2|u| \cdot \nabla|u|}}{\nabla |u|^2} = \nabla (u, u) = 2(\nabla_A u, u)$$

$|u|_\epsilon := \sqrt{|u|^2 + \epsilon}$ と定義.

ボッホナー(?)の式

$$\begin{cases} \cdot\ \Delta |u|^2 = 2(u, \nabla_A^* \nabla_A u) - 2|\nabla_A u|^2 \\ \cdot\ \Delta |u|^2 = 2|u| \Delta |u| - 2|\nabla |u||^2 \end{cases}$$

◎ Kato's ineqの重要な帰結 $(|G_A| \leq C\,G)$

$$2|u|\Delta|u| = \Delta|u|^2 + 2|\nabla|u||^2$$

$$= 2(u, \nabla_A^*\nabla_A u) - 2|\nabla_A u|^2 + 2|\nabla|u||^2$$

$$\therefore \Delta|u| = \left(\frac{u}{|u|}, \nabla_A^*\nabla_A u\right) - \frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}$$

$$\therefore \Delta|u| + |u| = \left(\frac{u}{|u|}, \nabla_A^*\nabla_A u + u\right) - \underbrace{\frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}}_{\geq 0}$$

$$\therefore \boxed{\Delta|u| + |u| \leq \left|\nabla_A^*\nabla_A u + u\right|}$$

この不等式により、上の議論はまるごとそのまま

Ⅱにおいて通る!

Prop

$$\nabla_A^* \nabla_A + 1 : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$$

も単射かつ全射である。

その逆写像を

$$G_A : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$$

とする。

定義 $u \in C^\infty(E)$ に対して、

函数のGreen核

$$\begin{cases} \|u\|_0 := \sup \int g(x,y)\, |u(y)|\, dy \\ \|u\|_{00} := \sup |u| + \sqrt{\sup \int g(x,y)\, |\nabla_A u|^2} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_0(E) := \overline{C^\infty(E)}^{\|\cdot\|_0} \quad \& \quad \mathcal{C}_{00}(E) := \overline{C^\infty(E)}^{\|\cdot\|_{00}}$$

Prop ← Kato's ineq の帰結

$G_A : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ は、$\mathcal{C}_0$ から L^∞ への有界線型写像に拡張できる。
さらに $\|G_A\|_{\mathcal{C}_0 \to L^\infty} \leq 1$ である。

indep of A

(∵) $\nabla_A^* \nabla_A u + u = \phi$ とする。

Kato's ineq より、

$$\Delta|u| + |u| \leq |\nabla_A^* \nabla_A u + u| = |\phi|$$

なので、

$$\begin{array}{ccc} \int g(x,y)\left(\Delta|u| + |u|\right)dy & \leq & \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy \\ \| & & \wedge\| \\ |u(x)| & & \|\phi\|_0 \end{array}$$

である。よって、

$$\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_0$$

//

Prop

$G_A : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ は ℓ_0 から ℓ_∞ への有界線型写像に拡張する。さらに，$\|G_A\|_{\ell_0 \to \ell_\infty} \leq 2$ である。

以後，全て これまでと同じ!!

§5. 文献

- Taubes の教科書

  "Metrics, Connections, and gluing theorems"

  pp. 34 – 46

4. Deformations to Anti-Self-Duality

- Donaldson,

  "The approximation of instantons"

  GAFA

- Taubes, JDG × 2

- Matsuo–Tsukamoto, Israel J.